

УДК 535.241.13

## ДИФРАКЦИЯ СВЕТА НА НАКЛОННЫХ ФАЗОВЫХ РЕШЕТКАХ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

*А.С. Волошин, В.И. Балакиш*

### Аннотация

Исследованы особенности брэгговской дифракции света на синусоидальной фазовой решетке, созданной в анизотропной среде акустической волной, для случая большого сноса акустической энергии. Получены модифицированные уравнения связанных волн, на основе которых проведен расчет частотных и угловых характеристик анизотропной дифракции в кристалле парателлурита. Показано, что снос акустического пучка существенно изменяет угловой и частотный диапазоны акустооптического взаимодействия.

**Ключевые слова:** дифракция, наклонные фазовые решетки, анизотропная среда, акустооптическое взаимодействие.

---

### Введение

Работа посвящена теоретическому исследованию дифракции света на объемной синусоидальной фазовой решетке, созданной в анизотропной среде. Особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что штрихи решетки образуют произвольный угол с плоскостью решетки. Такие фазовые решетки могут быть легко получены голографическим методом в толстослойной фотоэмульсии или фоторефрактивном кристалле [1]. Эта задача имеет особенно большое значение для акустооптики, где часто используются кристаллы с сильной акустической анизотропией, например парателлурит ( $\text{TeO}_2$ ), теллур ( $\text{Te}$ ) или каломель ( $\text{Hg}_2\text{Cl}_2$ ) [2–4]. Вследствие анизотропии в таких кристаллах возникает чрезвычайно большой угол сноса акустической энергии относительно направления волнового вектора звука. Так, например, в парателлурите угол сноса достигает  $74^\circ$ . Это означает, что угол между штрихами решетки и ее плоскостью равен  $16^\circ$  вместо обычных  $90^\circ$ .

Цель настоящей работы – изучение влияния наклона штрихов объемной фазовой решетки на характеристики дифракционного спектра.

### 1. Теоретический анализ

Предположим, что плоская световая волна с частотой  $\omega_0$  и длиной волны  $\lambda$  падает на вертикально расположенную фазовую решетку конечной ширины  $l$  под углом  $\theta_0$ . Особенность решетки заключается в том, что ее штрихи наклонены по отношению к плоскости решетки  $x = 0$  на угол  $\alpha$  (рис. 1). Запишем волновое уравнение для напряженности светового поля  $E$ , в котором показатель преломления  $n$ , а следовательно, и диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  промодулированы по синусоидальному закону:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (\epsilon E)}{\partial t^2}. \quad (1)$$

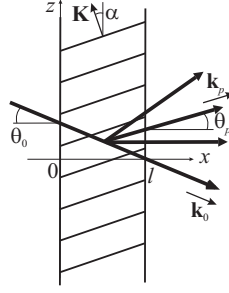


Рис. 1. Геометрия дифракции света на наклонной фазовой решетке

Для определенности будем считать, что фазовая решетка создана за счет фотоупругого эффекта акустической волной с частотой  $\Omega$  и волновым вектором  $\mathbf{K}$ . Тогда можно записать:

$$n(x, z, t) = n_0 + \Delta n \sin(\Omega t - K_x x - K_z z + \Phi), \quad (2)$$

$$\varepsilon = n(x, z, t)^2 = n_0^2 + 2n_0 \Delta n \sin(\Omega t - K_x x - K_z z + \Phi), \quad (3)$$

где  $n_0$  – статический показатель преломления среды,  $\Delta n$  – амплитуда его изменения под действием ультразвука,  $\Phi$  – начальная фаза. Для случая статической фазовой решетки достаточно в (2) и (3) положить  $t = 0$ .

Решение для  $E$  будем искать в виде суммы плоских волн с волновыми векторами  $\mathbf{k}_p$ , частотами  $\omega_p = \omega_0 + p\Omega$  и относительными амплитудами  $C_p$ :

$$E = E_0 \sum_p C_p(x) \exp[i(\omega_p t - k_{px} x - k_{pz} z)], \quad (4)$$

где  $p = 0, \pm 1, \dots$  – порядок дифракции.

Подставив (4) в (1), получим уравнения связанных мод, которые по существу являются модифицированными уравнениями Рамана – Ната [2]:

$$\frac{dC_p}{dx} = \frac{q_p}{2} \{C_{p+1} \exp[i(\eta_p x - \Phi)] - C_{p-1} \exp[-i(\eta_{p-1} x - \Phi)]\}, \quad (5)$$

где  $q_p = k_p^2 \Delta n / k_{px} n_p$  – параметры Рамана – Ната (коэффициенты связи),  $\eta_p = k_{px} + K_x - k_{p+1,x}$  – фазовые расстройки,  $n_p$  – показатель преломления для волны  $p$ -го порядка. Система уравнений (5) справедлива как для изотропной (без изменения поляризации света), так и для анизотропной (с изменением поляризации) дифракции. В последнем случае необходимо учесть изменение показателей преломления среды при изменении углов дифракции  $\theta_p$ .

Удобно ввести углы  $\varphi_p = \theta_p + \alpha$ , отсчитываемые, как это принято в акустооптике [2], от фронта акустической волны. Тогда выражения для расстроек примут вид:

$$\eta_p = k_p \cos(\varphi_p - \alpha) + K \sin \alpha - \sqrt{k_{p+1}^2 - [k_p \sin(\varphi_p - \alpha) + K \cos \alpha]^2}.$$

Считая, что дифракция эффективно происходит только в нулевой и первый порядки (брэгговский режим дифракции), пренебрежем всеми  $C_p$ , кроме  $C_0$  и  $C_1$ . Тогда система (5) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dC_0}{dx} = \frac{q_0}{2} C_1 \exp[i(\eta x - \Phi)], \\ \frac{dC_1}{dx} = -\frac{q_1}{2} C_0 \exp[-i(\eta x - \Phi)], \end{cases}$$

где  $\eta \equiv \eta_0$ . Ее решения задаются соотношениями:

$$C_0 = \left[ \cos \left( \frac{l}{2} \sqrt{\eta^2 + q_1 q_0} \right) - i \frac{\eta l}{2} \operatorname{sinc} \left( \frac{l}{2\pi} \sqrt{\eta^2 + q_1 q_0} \right) \right] \exp \left( i \frac{\eta l}{2} \right),$$

$$C_1 = -\frac{q_0 l}{2} \operatorname{sinc} \left( \frac{l}{2\pi} \sqrt{\eta^2 + q_1 q_0} \right) \exp \left[ -i \left( \frac{\eta l}{2} - \Phi \right) \right].$$

Заметим, что фазовую расстройку можно представить в виде вектора, который замыкает векторную диаграмму волновых векторов, определяющую геометрию акустооптического взаимодействия [2]:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_0 + \mathbf{K} + \boldsymbol{\eta}. \quad (6)$$

Из того, что  $\boldsymbol{\eta}$  имеет проекцию только на ось  $x$ , ясно, что этот вектор направлен перпендикулярно вертикальным границам фазовой решетки. Величина вектора  $\boldsymbol{\eta}$  отвечает за эффективность дифракции в первый порядок: чем она больше, тем меньше интенсивность рассеянного света. Область акустооптического взаимодействия обычно определяют условием  $|\eta l| \leq \pi$ . Таким образом, существует противоречивая связь: чем больше ширина акустического столба  $l$ , тем больше эффективность дифракции  $\zeta = C_1 C_1^*$ , но тем меньше угловой и частотный диапазоны акустооптического взаимодействия. Учитывая эти особенности, легко качественно объяснить те или иные закономерности рассматриваемой дифракционной задачи.

## 2. Результаты расчета для кристалла парателлуриата

Численный расчет проведен для случая акустооптического взаимодействия в кристалле парателлуриата. Для расчета выбрана плоскость  $(1\bar{1}0)$ , которая используется в большинстве акустооптических устройств, выполненных из этого кристалла.

На рис. 2 показана структура акустического поля в парателлуриате, визуализированная акустооптическим методом. Пьезопреобразователь шириной 1 мм прикреплен к нижней грани кристалла. Акустическая волна распространяется вертикально вверх в направлении  $[110]$ . Для этого среза кристалла получается уникально высокое значение акустооптического качества  $M = 1200 \cdot 10^{-18} \text{ с}^3/\text{г}$  [2]. Однако, как видно из фотографии, акустическое поле в этом случае получается очень неоднородным из-за того, что акустический пучок, пройдя всего 1 см в кристалле, отражается от боковых граней. В результате интерференции прямых волн с отраженными образуется структура, имеющая множество сгущений и разрежений, что значительно снижает эффективность дифракции и, конечно же, усложняет численный расчет. Причиной является сильная акустическая анизотропия, приводящая к тому, что расходимость потока энергии оказывается в 50 раз больше дифракционной расходимости. Для получения однородного пучка в прикладной акустооптике используют косые срезы с меньшими значениями качества  $M$ . В этом случае акустический пучок получается с достаточно однородной структурой, но зато появляется снос энергии пучка. На рис. 3 показана зависимость угла сноса  $\alpha$  от угла среза  $\chi$ , отсчитываемого от направления  $[110]$  кристалла в направлении оптической оси  $[001]$ . Видно, что угол сноса достигает значения  $\alpha = 57^\circ$  при  $\chi = 17^\circ$ .

На рис. 4 представлена зависимость углов Брэгга  $\varphi_B$  от частоты ультразвука  $f$  для среза с углом  $\chi = 10^\circ$ . В этом случае угол сноса равен  $\alpha = \pm 54^\circ$  (в зависимости от ориентации акустооптической ячейки относительно падающего света). Кривые рассчитаны для разных поляризаций света ( $o$  и  $e$ ) и  $\pm 1$  порядков дифракции. Так, ветвь  $+1e$  соответствует анизотропной (с изменением поляризации)

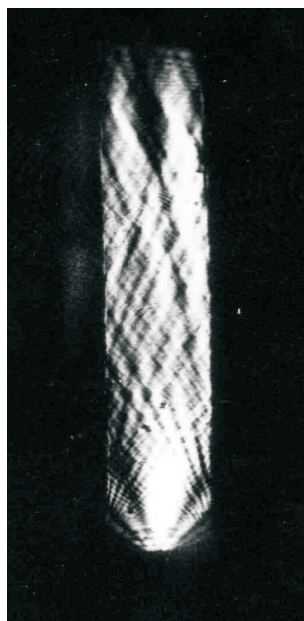


Рис. 2. Структура акустического поля в кристалле парателлурита при возбуждении сдвиговой акустической волны в направлении  $[110]$

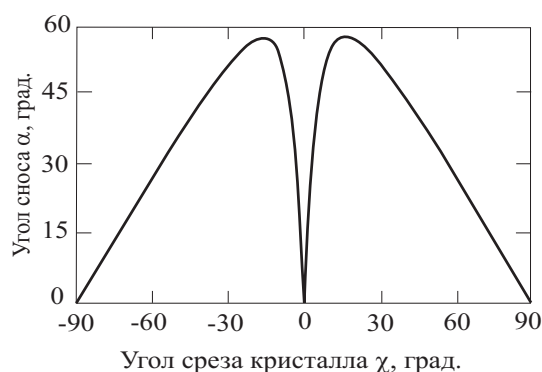


Рис. 3. Зависимость угла сноса акустической энергии от направления акустической волны в плоскости  $(1\bar{1}0)$  кристалла парателлурита

дифракции необыкновенной волны в  $+1$  порядок. Представленные ниже расчеты выполнены именно для этой кривой, которая используется либо в дефлекторах (область минимума, где  $\varphi_B = 5.4^\circ$ ,  $f = 240$  МГц), либо в фильтрах (область вблизи вертикальной касательной – тангенциальной точки, где  $f = 120$  МГц,  $\varphi_B = 13.8^\circ$ ).

Одной из основных характеристик акустооптических устройств является частотная характеристика, определяющая их быстродействие. Рис. 5 иллюстрирует зависимость полуширины частотных характеристик  $\Delta f$  от угла Брэгга  $\varphi_B$ , рассчитанных для  $l = 1$  см. Используя кривую  $+1e$  на рис. 4, можно перестроить эти графики в виде зависимости  $\Delta f$  от центральной частоты  $f_0$  частотного диапазона.

Сплошная кривая относится к случаю  $\alpha = 0^\circ$ ; соответствующую полосу обозначим как  $\Delta f_0$ . Пунктирные линии характеризуют реальную акустооптическую ячейку с углом среза  $\chi = 10^\circ$  и углами сноса  $\alpha = \pm 54^\circ$  (ширина полосы  $\Delta f_{\pm}$ ).

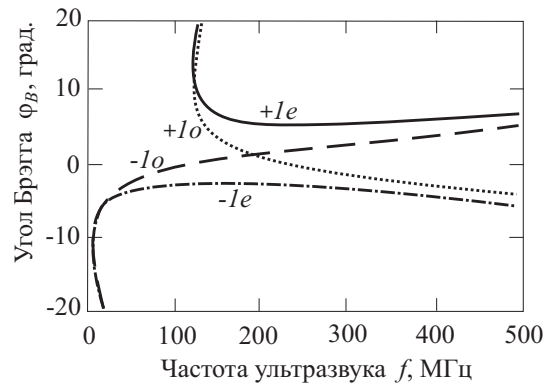


Рис. 4. Частотная зависимость углов Брэгга

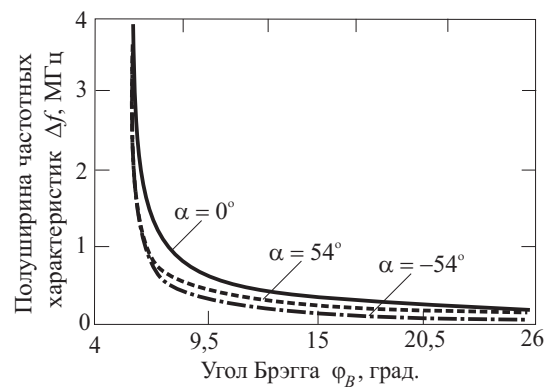


Рис. 5. Зависимость полуширины частотных характеристик от угла Брэгга

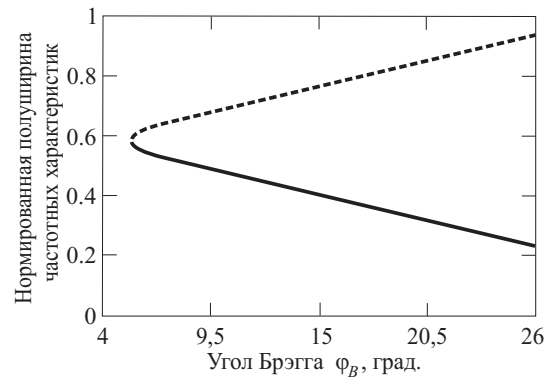


Рис. 6. Зависимость нормированной полуширины частотных характеристик от угла Брэгга

Расчет выполнен для диапазона углов Брэгга от нуля до  $26^\circ$ , который наиболее интересен с практической точки зрения. Всюду в этом диапазоне акустический снос приводит к уменьшению полосы частот акустооптического взаимодействия. Но степень сужения полос  $\Delta f_{\pm}$  разная в зависимости от частоты синхронизма  $f_0$

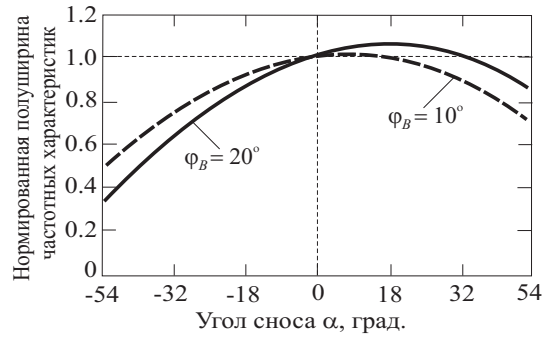


Рис. 7. Зависимость нормированной полуширины частотных характеристик от угла сноса

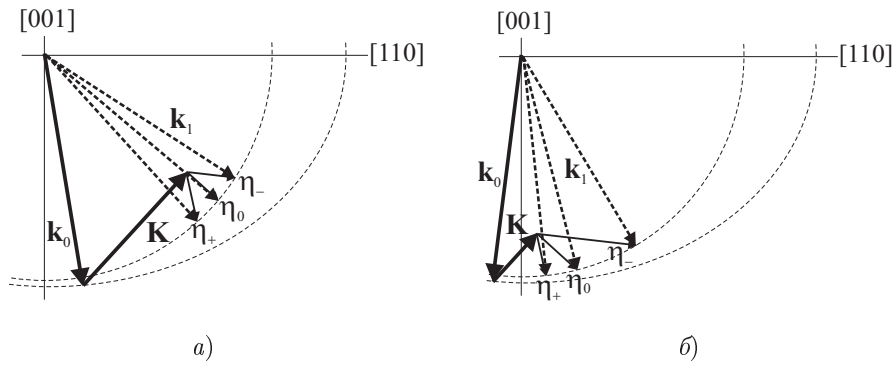


Рис. 8. Векторные диаграммы для малых (а) и больших (б) углов Брэгга

и знака угла сноса. Это хорошо видно на рис. 6, где по оси ординат отложена нормированная величина  $\Delta f_{\pm}/\Delta f_0$ . В диапазоне частот ультразвука ниже точки минимума  $f = 240$  МГц (рис. 4) пунктирная кривая на рис. 6 относится к углу сноса  $\alpha = +54^\circ$ , а сплошная кривая — к углу  $\alpha = -54^\circ$ . В точке минимума эти кривые смыкаются, а в диапазоне  $f > 240$  МГц кривые меняются местами. Видно, что при больших углах Брэгга влияние угла сноса на частотные характеристики становится очень сильным: частотный диапазон акустооптического взаимодействия может сужаться в 5 раз. Поэтому этот эффект определенно необходимо учитывать при расчете акустооптических устройств.

Дополнительную информацию о влиянии угла сноса на частотные характеристики дает рис. 7, где представлена зависимость нормированной полосы  $\Delta f_{\pm}/\Delta f_0$  от угла  $\alpha$ . Две кривые относятся к случаям настройки ячейки на разные углы Брэгга:  $10^\circ$  и  $20^\circ$ . Оба варианта реализуются на одной и той же частоте ультразвука  $f = 124$  МГц, но ниже и выше точки тангенциальной геометрии (рис. 4). Полученные кривые говорят о том, что зависимость  $\Delta f(\alpha)$  имеет сложный характер; на ней сильно сказывается геометрия акустооптического взаимодействия.

Все отмеченные особенности можно объяснить с помощью векторных диаграмм, иллюстрирующих соотношение (6). На рис. 8 схематично показано векторное построение для малых (а) и больших (б) углов Брэгга. Парателлузит является положительно двулучепреломляющим кристаллом: у него показатель преломления для необыкновенной оптической моды  $n_0$  больше показателя преломления для обыкновенной моды  $n_1$ . Вектор падающего света имеет длину  $k_0 = 2\pi n_0/\lambda$ , его конец лежит на эллипсе, тогда как вектор дифрагированного света длиной  $k_1 = 2\pi n_1/\lambda$  заканчивается на окружности. Если не выполняется условие фазового синхронизма (условие Брэгга),

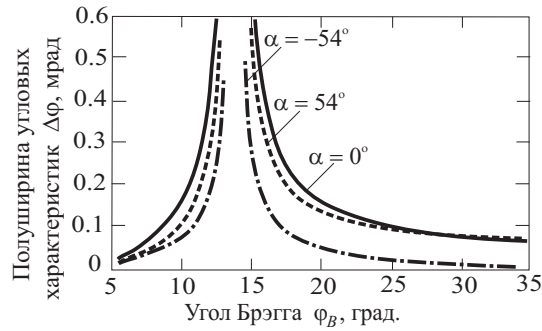


Рис. 9. Зависимость полуширины угловых характеристик от угла Брэгга

то векторная диаграмма замыкается благодаря ненулевой расстройке. Вектор расстройки  $\eta$  направлен перпендикулярно границам акустического столба. Поэтому при  $\alpha = 0^\circ$  вектор  $\eta_0$  перпендикулярен волновому вектору звука  $\mathbf{K}$ , а при наличии сноса вектора  $\eta_{\pm}$  повернуты на соответствующие углы  $\alpha = \pm 54^\circ$ . Рис. 8, а иллюстрирует геометрию взаимодействия вблизи минимума частотной зависимости угла Брэгга. Здесь дифрагированный пучок направлен почти перпендикулярно вектору  $\mathbf{K}$ . Вследствие этого вектора  $\eta_+$  и  $\eta_-$  имеют практически одинаковую длину, которая больше длины вектора  $\eta_0$ . Отсюда вытекает, что диапазон акустооптического взаимодействия при наличии угла сноса должен быть меньше, чем в случае, когда сноса нет. Другой вариант геометрии взаимодействия иллюстрирует рис. 8, б. В этом случае вектора  $\eta_0$  и  $\eta_+$  имеют практически одинаковую длину, которая заметно меньше, чем длина вектора  $\eta_-$ . Поэтому диапазон взаимодействия при угле сноса  $\alpha = -54^\circ$  получается существенно меньше, чем в остальных двух случаях. Кривая на рис. 6 хорошо отражает эти особенности.

Еще одной важной характеристикой акустооптического взаимодействия является зависимость эффективности дифракции от угла падения света, которая определяет угловой диапазон  $\Delta\varphi$  работы акустооптических устройств. На рис. 9 представлена зависимость  $\Delta\varphi(\varphi_B)$  для тех же значений параметров, что и на рис. 5. Угловые характеристики по своему виду заметно отличаются от частотных характеристик в области тангенциальной геометрии, где угловая селективность акустооптического взаимодействия становится очень малой. Однако зависимость нормированной величины  $\Delta\varphi_{\pm}/\Delta\varphi_0$  от угла Брэгга в точности повторяет зависимость  $\Delta f_{\pm}/\Delta f_0$ , показанную на рис. 6. Это же справедливо и для зависимости  $\Delta\varphi_{\pm}/\Delta\varphi_0$  от угла сноса  $\alpha$ .

### Заключение

В настоящей работе получено аналитическое решение задачи дифракции света на наклонной фазовой решетке. Получены модифицированные уравнения Рамана–Ната и аналитическое выражение для фазовой расстройки, определяющей эффективность дифракции.

Показано, что угол наклона  $\alpha$  (угол сноса акустического пучка в случае акустооптического взаимодействия) может существенно менять частотные и угловые характеристики дифракции. Сужение диапазона акустооптического взаимодействия из-за сноса акустического пучка может достигать нескольких раз. Это говорит о том, что снос пучка необходимо учитывать при разработке акустооптических устройств.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 08-07-00498).

### Summary

*A.S. Voloshin, V.I. Balakshy.* Light Diffraction on Slanted Phase Gratings in Anisotropic Medium.

The peculiarities of the Bragg diffraction of light on a sinusoidal phase grating created in anisotropic medium by an acoustic wave were studied for the case of great acoustic energy walk-off. The modified equations of coupled waves were derived, which allowed to calculate frequency and angular characteristics of anisotropic diffraction in a paratellurite crystal. It is shown that the acoustic beam walk-off changes essentially the angular and frequency ranges of acousto-optic interaction.

**Key words:** diffraction, slanted phase gratings, anisotropic medium, acousto-optic interaction.

### Литература

1. *Задорин А.С., Шарангович С.Н.* Исследование акустооптического взаимодействия в условиях фазовой расстройки // Оптика и спектр. – 1985. – Т. 59, № 3. – С. 592–596.
2. *Балакший В.И., Парыгин В.Н., Чирков Л.Е.* Физические основы акустооптики. – М.: Радио и связь, 1985. – 280 с.
3. *Балакший В.И., Волошинов В.Б., Князев Г.А., Кулакова Л.А.* Исследование акустооптических характеристик кристаллов теллура в режиме анизотропной дифракции света // ЖТФ. – 2008. – Т. 78, № 10. – С. 87–95.
4. *Voloshinov V.B., Polikarpova N.V.* Acousto-optic investigation of propagation and reflection of acoustic waves in paratellurite crystal // Appl. Opt. – 2009. – V. 48, No 7. – P. C55–C66.

Поступила в редакцию  
25.12.09

---

**Волошин Андрей Сергеевич** – студент кафедры физики колебаний физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

E-mail: *voloshin-andrey@yandex.ru*

**Балакший Владимир Иванович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики колебаний физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

E-mail: *balakshy@phys.msu.ru*